ENSINO EXPLORATÓRIO: ABORDAGEM DE UMA TAREFA PROMOTORA DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO COM ALUNOS DA 3ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Fabio Dubiela Bahls
Unicentro
dubiela_b@hotmail.com

Juliana Hazt
Unicentro
juliana_hazt@outlook.com

Márcio André Martins
Unicentro
mandre@unicentro.br

Resumo:
O presente trabalho relata a abordagem de uma tarefa exploratória com estudantes da 3ª série do Ensino Médio de uma escola pública, envolvendo o conteúdo de função de primeiro grau. A partir disso, busca-se analisar os tipos e processos de Raciocínio Matemático (RM) movidos pelos estudantes. As informações foram coletadas no ambiente da sala de aula por meio de observação participante, anotações dos pesquisadores e produção escrita dos estudantes. Foram identificados três processos de RM, o de conjecturar relacionado ao Raciocínio Abdutivo, o de generalizar ligado ao Raciocínio Indutivo, e o processo de justificar decorrente do Raciocínio Dedutivo. Além disso, a experiência colaborou para o aprendizado sobre função de primeiro grau, reconhecimento de uma expressão algébrica por meio de uma tabela e a representação gráfica da solução encontrada.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Função do Primeiro Grau. Processos de Raciocínio.

Introdução

O Ensino Exploratório é uma abordagem pedagógica em que os alunos são incentivados a descobrir e construir conhecimento por meio da exploração ativa e da resolução de tarefas. O professor assume o papel de mediador, incentivando a participação e autonomia dos alunos, promovendo a reflexão, a discussão e incentivando a comunicação em sala de aula (Ponte, 2005).

Nesta abordagem de ensino, os alunos mergulham no processo de realização da tarefa e constroem suas ideias matemáticas que mais tarde serão pautadas e refinadas em discussão coletiva. Os alunos trabalham a "possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática" (Canavarro, 2011).

Além disso, Ponte, Quaresma e Mata-Pereira enfatizam que

> A abordagem de ensino exploratório, baseada numa seleção criteriosa de tarefas e num ambiente estimulante de comunicação, com destaque para as discussões coletivas, proporciona um ensino da Matemática com compreensão e é uma base importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático (2020, p. 11).

O Ensino Exploratório pode contribuir com o estabelecimento de cenários potenciais ao desenvolvimento do RM dos alunos, evidenciando a investigação. Dessa forma, esta abordagem está em consonância com a competência descrita na BNCC de "desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo" (Brasil, 2018, p. 267). Entretanto, a partir dessas orientações curriculares, há a necessidade de vivências em sala de aula, materializadas por lições de cunho exploratório e investigativo.

A partir desses preceitos, adaptamos uma tarefa para analisar o desenvolvimento do RM dos estudantes e estimulá-los a formular conjecturas, testar hipóteses e justificar suas descobertas. Descrevemos na sequência alguns fundamentos teóricos e metodológicos considerados~~,~~ e, em seguida, relatamos a nossa vivência em sala de aula com a lecionação de uma lição centrada em uma tarefa exploratória promotora do RM.

Raciocínio Matemático

No que se refere à aprendizagem dos alunos, é importante esclarecer que o desenvolvimento do Raciocínio Matemático (RM) envolve "processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (Campos; Ponte, 2022, p. 678). Um dos pontos fundamentais para promover o RM dos alunos é compreender o que se entende por raciocinar matematicamente e quais os processos RM a desenvolver nos alunos (Mata-Pereira; Ponte, 2018, p. 782). Dentre os tipos de RM encontram-se o dedutivo, o abdutivo e o indutivo.

O Raciocínio Dedutivo (RD) tem ênfase nas ciências exatas, a importância deste raciocínio na matemática é de tal ordem que Davis e Hersh (1995, *apud* Ponte *et al*., 2020, p. 7) afirmam que a dedução é o "selo da Matemática". De acordo com Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), em matemática, assumimos um conjunto de afirmações como verdadeiras (axiomas ou postulados) e assumimos um conjunto de regras de inferência, para obter novas informações verdadeiras (teoremas), desde que o processo não apresente erros, "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (Oliveira, 2008, p. 7).

O Raciocínio Abdutivo (RA) é fundamentado no ato de conjecturar. Segundo Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), "abdução é um processo de inferência que parte de um fato insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência". Dessa forma, o RA pode gerar argumentações, visto que "uma hipótese resultante de um raciocínio abdutivo admite a necessidade da verificação e da objetividade" (Martins; Henriques, 2022, p. 95).

Por sua vez, o Raciocínio Indutivo (RI) está associado ao processo de generalização. Para Martins e Henriques (2022, p. 94) "a indução admite que uma descoberta ocorre pela observação, pela testagem de exemplos particulares e pela identificação de padrões de regularidade". Trata-se de reconhecer um padrão durante o desenvolvimento do problema, e verificar se determinado padrão se repete dentro e fora do domínio em questão.

Ademais, o RM também admite alguns processos: conjecturar, generalizar e justificar.

> Conjecturar, [...] é central no raciocínio abdutivo. Generalizar, ou seja, formular conjecturas de natureza geral, é um processo-chave dos raciocínios indutivo e abdutivo. Justificar, pelo seu lado, é um processo essencial do raciocínio dedutivo. (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020, p. 11).

Trabalhar com a abordagem exploratória enfatiza a "construção de conceitos, a modelação de situações e a utilização de definições e propriedades de objetos matemáticos para os alunos realizarem raciocínios" (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020, p. 10). Os autores destacam que os processos de conjecturar, generalizar e justificar devem ser valorizados desde os primeiros anos de escolaridade, e são definidos de acordo com uma base e forma que podem assumir durante o desenvolvimento da tarefa.

Para caracterizar e relacionar os tipos de processo de RM, suas bases e formas assumidas, apresentamos o Quadro 1.

Tipo	Processo	Base	Forma
Abdutivo	Conjecturar Generalizar	- observação; - construção; - transformação do conhecimento prévio; - combinações de observação, construção e transformação.	• identificar uma possível solução para um problema; • formular uma estratégia para resolver um problema.
Indutivo			• reconhecer um padrão ou uma propriedade comum a um conjunto de objetos; • alargar o domínio de validade de uma propriedade a um conjunto mais vasto de objetos.
Dedutivo	Justificar	- definições; - axiomas, propriedades, princípios gerais; - representações; - combinações de definições, propriedades e representações.	- coerência lógica; - uso de exemplos genéricos; - uso de contraexemplos; - por exaustão; - por absurdo.

Quadro 1 - Quadro dos processos, bases e formas de cada tipo de RM.
Fonte: Elaborado pelo autor com base em Martins e Henriques (2022, p. 100).

Ensino Exploratório

Canavarro (2011) coloca que no Ensino Exploratório "os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva" (p. 11). Para que isso aconteça, o professor deve selecionar a tarefa adequada à perspectiva de exploração e seus propósitos matemáticos.

Para Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), o professor traz o foco para tarefas que não tem um método de resolução imediato, assim os alunos precisam desenvolver estratégias para a construção de conceitos, modelos de situações, e investigação das propriedades e conceitos matemáticos. Os alunos são incentivados a apresentar sua solução e justificar seu raciocínio, é dessa forma que "os alunos assumem um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução" (Ponte; Quaresma e Mata-Pereira, 2020, p. 10).

Em acordo com Ponte *et al.* (1999), um trabalho investigativo precisa conter algumas características fundamentais como: uma ou um conjunto de questões; conjecturas para direcionar o trabalho; experiências práticas em sala de aula para coletar dados e testar as conjecturas; e a validação. E a abordagem exploratória conta com dois principais suportes:

> Um deles é a escolha de tarefas apropriadas, suscetíveis de promover a construção de conceitos, a formulação de conjeturas, generalizações e justificações. O outro é o estabelecimento de um ambiente de comunicação na sala de aula capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos, com relevo para os momentos de discussão coletiva. (Ponte; Quaresma; Mata-Pereira, 2020, p. 10).

O trabalho investigativo dentro de sala de aula é abordado em algumas etapas fundamentais, como o lançamento da tarefa, o trabalho autônomo, e a discussão coletiva e síntese (Ponte, 1998; Stein, 2008). No desenvolvimento do trabalho autônomo ocorre a fase de exploração, os alunos são incentivados a trabalhar na tarefa, e encorajados a abordar o problema da maneira que fizer mais sentido para eles e a estarem preparados para explicar sua abordagem para os outros na classe durante a etapa de discussão coletiva e síntese (Stein, 2008, p. 6).

Dessa forma, o envolvimento dos alunos na abordagem de ensino com tarefas de investigação nos "permite compreender melhor os processos que usam e a evolução dos seus raciocínios" (Henriques, 2011, p. 4).

Metodologia

A experiência de ensino ocorreu em uma escola estadual do campo, com uma turma da 3ª série do Ensino Médio, com faixa etária entre dezesseis e dezessete anos de idade, composta por 13 estudantes, sendo 8 meninas e 5 meninos.

Em relação ao conteúdo, foi abordada uma tarefa envolvendo equação do 1º grau, para ser desenvolvida durante 2 aulas de 50 minutos. Admitimos como conhecimento prévio dos estudantes, a partir de conteúdos já estudados em sala de aula, operações com números inteiros, função, expressões numéricas e algébricas. Como princípios para elaboração da tarefa, consideramos a possibilidade de uma variedade de estratégias de resoluções e representações, visando a formulação de generalizações baseadas na observação de semelhanças e diferenças da construção (Ponte *et al*. 2022).

Assumimos o intuito da exploração de dados de uma tabela, envolvendo a distância de uma corrida feita por um táxi e o preço a ser cobrado.

1. O cálculo do preço de uma corrida de táxi inclui o valor fixo (bandeira), que cobre as despesas fixas, mais o valor que varia de acordo com a distância percorrida de acordo com a tabela a seguir:

Distância (km)	Preço (R$)
0	4,50
1	7,25
2	10,00
3	12,75
4	15,50
5	18,25
6	?

A. Qual o valor da próxima corrida? E para **7 km** de distância quanto ele pagaria a mais?

B. Depois de quantos quilômetros percorridos ele cobraria **R$32,00**?

Figura 1 - Tarefa - questões A e B
Fonte: arquivo dos autores

C. Para uma distância de 8km o valor cobrado seria **R$22,00**? Justifique a sua resposta?

D. Consegue representar a tabela em forma de desenho?

E. E se eu quiser saber o valor de uma corrida em qualquer distância, como eu calcularia?

F. Após uma pequena viagem de **114 km**, qual seria o valor da corrida? Qual foi a estratégia utilizada para responder?

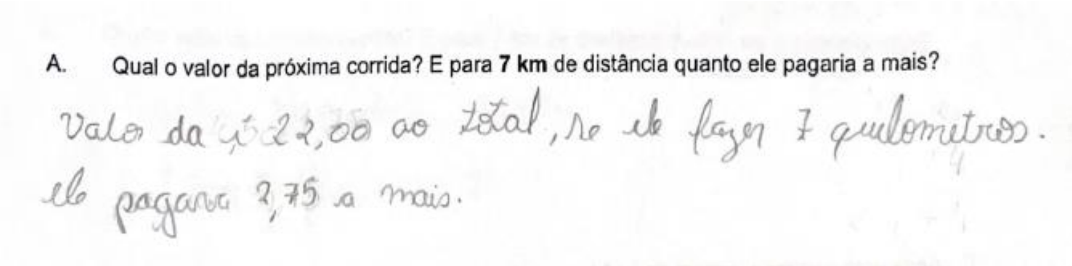
Figura 2 - Tarefa - questões C, D, E e F
Fonte: arquivo dos autores

A tarefa foi abordada em sala de aula por meio da aula em três fases sendo elas: introdução da tarefa, realização do trabalho e a discussão coletiva e síntese dos resultados (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2003). Para preservar a identidade dos alunos, consideramos os códigos: A1 - aluno 1; A2 - aluno 2; A3 - aluno 3; assim sucessivamente.

Para a análise das informações coletadas, assumimos a perspectiva qualitativa e interpretativa. De acordo com Moreira e Rosa (2016, p. 6), a perspectiva qualitativa envolve “interpretação dos significados atribuídos pelos sujeitos a suas ações em uma realidade socialmente construída”. Assim, “o pesquisador busca universais concretos alcançados através do estudo profundo de casos particulares e da comparação desse caso com outros estudados também com grande profundidade” (p. 6-7).

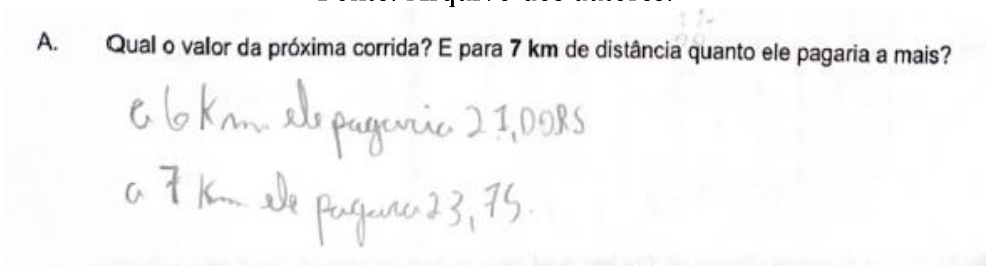
Resultados e Discussão

Com relação a questão A da tarefa (Figura 1) apresentamos na sequência alguns exemplos representativos das resoluções realizadas pelos estudantes.


A. Qual o valor da próxima corrida? E para **7 km** de distância quanto ele pagaria a mais?

Valor da R$ 22,00 ao total, se ele fazer 7 quilometros. ele pagaria 2,75 a mais.

Figura 1 – Resolução da questão A da Tarefa – Por A1
Fonte: Arquivo dos autores.

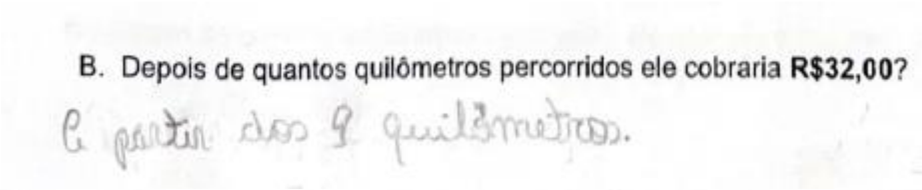

A. Qual o valor da próxima corrida? E para **7 km** de distância quanto ele pagaria a mais?

e 6 km ele pagaria 21,00R$
a 7 km ele pagaria 23,75.

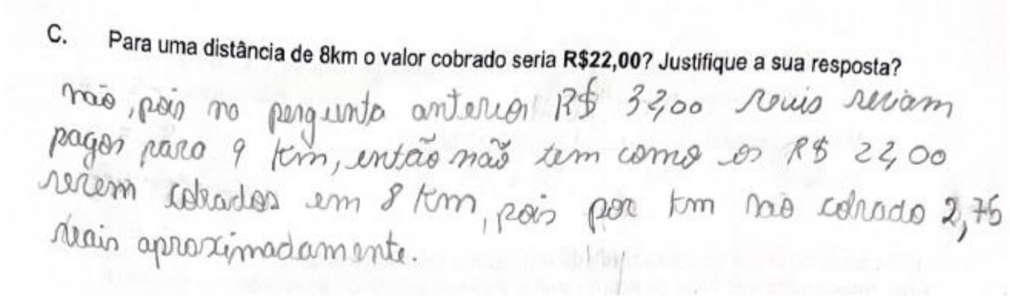
Figura 2 – Resolução da questão A da Tarefa – Por A2
Fonte: Arquivo dos autores.

Esses exemplos correspondem à realização de uma conjectura com base na observação, proveniente do RA, o A2 colocou o valor que encontrou correspondente a 7 km, o A1 fez a diferença dos valores e identificou que a cada quilômetro seria acrescentado o valor de R$2,75 a mais no valor da corrida.

Nota-se que, na questão C, o A1 utilizou os dados obtidos na questão B e, com base no processo de justificação, fez uma inferência dedutiva, conforme observamos nas Figuras 3 e 4.


B. Depois de quantos quilômetros percorridos ele cobraria **R$32,00**?

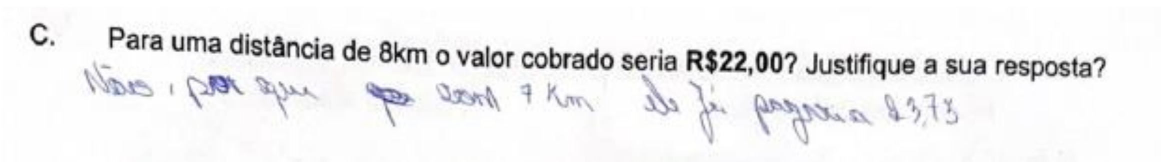
a partir dos 9 quilômetros.


C. Para uma distância de 8km o valor cobrado seria **R$22,00**? Justifique a sua resposta?

não, pois na pergunta anterior R$ 32,00 reais seriam pagos para 9 km, então não tem como os R$ 22,00 serem cobrados em 8 km, pois por km são cobrado 2,75 reais aproximadamente.

Figuras 3 e 4 – Resolução da questão B e C da Tarefa – Por A1
Fonte: Arquivo dos autores.

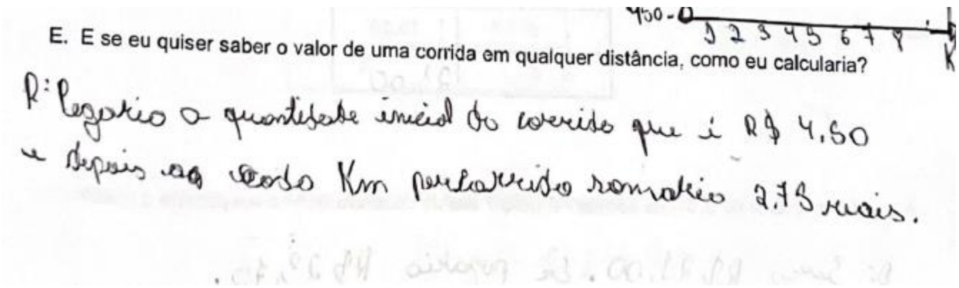
A questão B perguntava a partir de quantos quilômetros percorridos o taxista cobraria R$32,00 e o aluno respondeu a partir de 9 km, portanto compreendeu que o valor correspondente é acima de 9 km. A1 tomou a questão B como contra exemplo, fazendo uso desta forma (Quadro 1) para justificar sua resposta, caracterizando assim o RD. Se custaria R$32,00 para uma corrida acima de 9 km, e o valor em questão é de R$22,00, logo não é correto, uma vez que se sabe que a diferença entre um quilômetro e o próximo é de R$2,75. Para A4, com a observação do valor obtido durante a elaboração de sua conjectura (Figura 5), na questão anterior, notou que não era válida a afirmação pautada na questão C, expressando com isso o processo de justificação, inerente ao RD, por meio da forma de coerência lógica (Quadro 1).


C. Para uma distância de 8km o valor cobrado seria **R$22,00**? Justifique a sua resposta?

Não, por que com 7 km ele já pagaria R$ 3,73

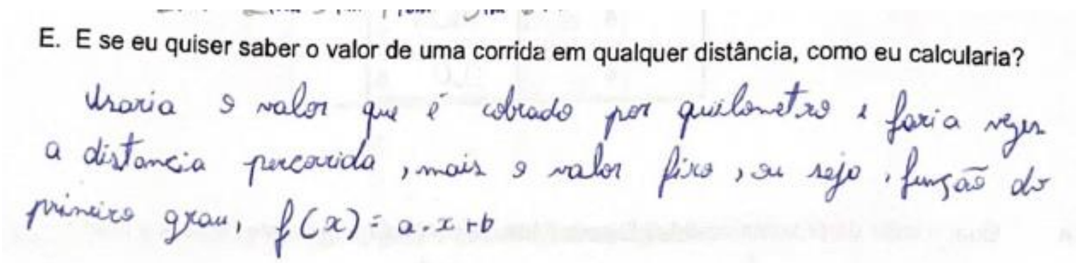
Figuras 5– Resolução da questão C da Tarefa – Por A4
Fonte: Arquivo dos autores.

Na letra E, para o processo de generalização, A5 teceu uma conjectura de natureza geral com base na observação e na construção (representação da Figura 6), assumindo a forma de reconhecimento de um padrão (Quadro 1), decorrente do RI. Observamos nos dados coletados, diversos casos desta natureza, em que o RI representa uma aprendizagem transversal e o conceito de função de primeiro grau a abordagem de um conteúdo específico, além da estratégia de soma dos quilômetros percorridos.


E. E se eu quiser saber o valor de uma corrida em qualquer distância, como eu calcularia?
R: Cobraria a quantidade inicial da corrida que é R$ 4,50 e depois a cada Km percorrido somaria 2,75 mais.

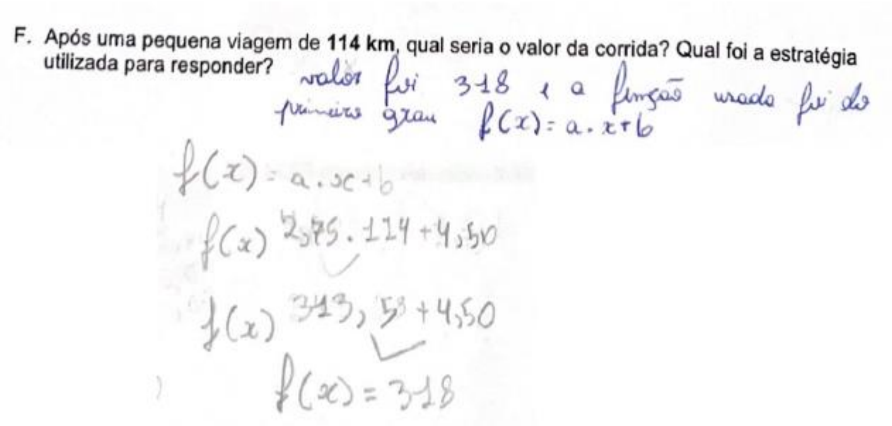
Figuras 6 – Resolução da questão E da Tarefa – Por A5
Fonte: Arquivo dos autores.

Observamos que A8 (Figura 7) reconheceu um padrão comum na cobrança da corrida do taxista (sendo a forma identificada, conforme o Quadro 1), e a partir da transformação de um conhecimento prévio (sendo a base identificada, conforme o Quadro 1) obteve uma generalização, processo este associado a RI.


E. E se eu quiser saber o valor de uma corrida em qualquer distância, como eu calcularia?
Usaria o valor que é cobrado por quilometro e faria vezes a distancia percorrida, mais o valor fixo, ou seja, função do primeiro grau, $f(x) = a.x + b$

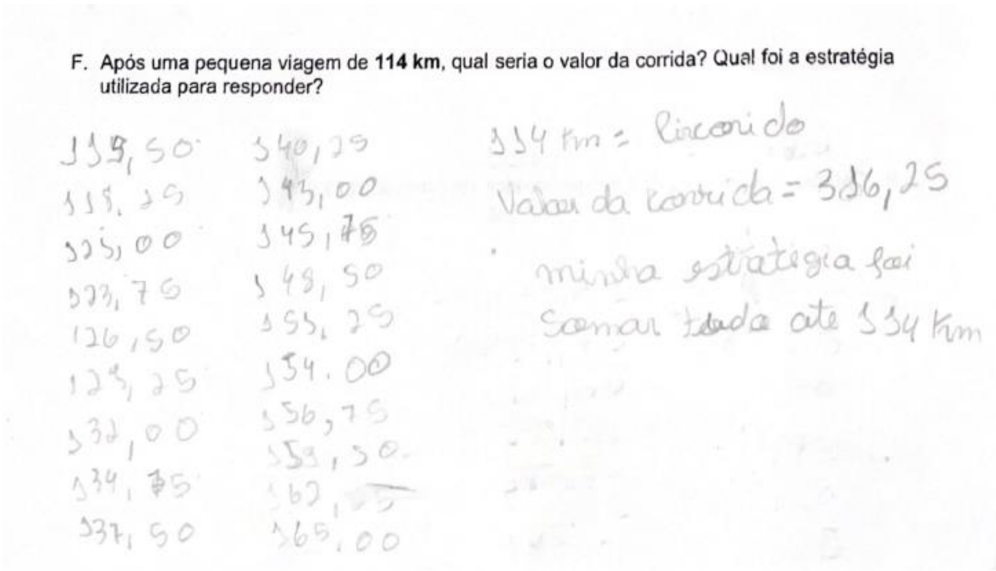
Figuras 7 – Resolução da questão E da Tarefa – Por A8
Fonte: Arquivo dos autores.

A partir disso, A8 conseguiu representar o seu processo de generalização se estendendo à questão F (Figura 8), em que se solicitava um valor que se encontrava fora do conjunto apresentado ao início da tarefa, ou seja, alargando o domínio de validade função encontrada (forma identificada, conforme o Quadro 1).



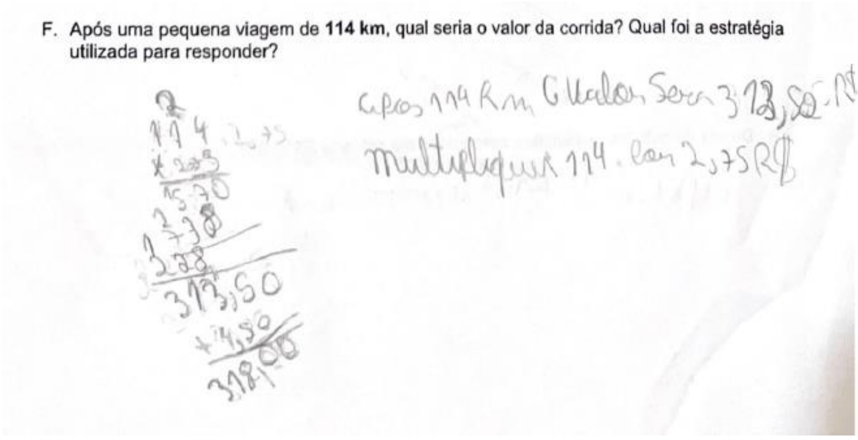
Figuras 8 – Resolução da questão F da Tarefa – Por A8
Fonte: Arquivo dos autores.

A13 escolheu como estratégia a soma de todos os quilômetros para verificar qual seria o custo da corrida ao final de 114 km (Figura 9). A solução apresentada de R$316,25 é decorrente de 115 quilômetros sem a cobrança da bandeira. A estratégia está correta, mas ao utilizá-la não é levado em consideração o processo de generalização decorrente do RI e, o estudante não se atentou à quantidade de quilômetros que estava somando e ao valor inicial da corrida, ocasionando um equívoco no valor da cobrança final.



Figuras 9 – Resolução da questão F da Tarefa – Por A13
Fonte: Arquivo dos autores.

No caso do A6, ele apresenta como ocorre o processo até chegar ao valor, mas não construiu uma representação algébrica para o problema em evidência.



Figuras 9 – Resolução da questão F da Tarefa – Por A6
Fonte: Arquivo dos autores.

Considerações

A vivência com o Ensino Exploratório em sala de aula mostrou-se relevante na identificação e caracterização dos processos de RM. Os alunos desenvolveram conjecturas com base na observação, generalizaram de acordo com o conhecimento prévio sobre funções e justificaram de acordo com a coerência lógica envolvida nas questões.

Vale destacar que o processo de generalização envolvido na tarefa foi desafiador para os estudantes. Pois, notou-se certa dificuldade entre eles ao formular uma estratégia de resolução que atendesse todo o domínio conhecido, assim como para valores não tabelados. Assim, alguns estudantes optaram por, ao invés de relacionar à função de primeiro grau, realizar uma soma. Esta estratégia se mostrou familiar aos discentes. Foram realizadas comparações e questionamentos quanto à forma de resolução, durante a síntese final, visando ao processo de generalização por meio da forma algébrica da função.

Durante a primeira fase da aula, em que a tarefa foi apresentada aos alunos, o professor tomou o cuidado de se certificar sobre o entendimento dos alunos a respeito do que era solicitado. Com as explicações necessárias, sem diminuir o grau de dificuldade, além de incentivar os estudantes, durante o trabalho autônomo que caracteriza a segunda fase da aula, o professor assumiu o papel de orientador da investigação. Observou-se envolvimento dos estudantes no desenvolvimento da tarefa, pois se tratava de uma situação cotidiana, que fazia sentido para eles. No decorrer da discussão coletiva, terceira fase da aula, os alunos comentaram sobre seus métodos de resolução e trocaram ideias, neste momento o professor realizou algumas intervenções, explicitando os procedimentos adotados em alguns caminhos utilizados, a fim de mostrar que havia possibilidade de resoluções diversas.

Além disso, no decorrer da tarefa foi observado que alguns alunos possuíam dificuldades em relação à matemática básica, às operações elementares, acarretando uma dificuldade ainda maior na resolução da tarefa. Assim, foi possível um diagnóstico da turma, pelo professor, de modo que o seu planejamento passou a considerar isso em seu trabalho futuro com a turma.

Salientamos que, com o Ensino Exploratório, os estudantes conseguiram experienciar a matemática de forma produtiva e colaborativa, construindo estratégias e soluções, estimulando seu conhecimento. Esperamos, com essa proposta, contribuir com os educadores e seus alunos, com o propósito de apoiar o desenvolvimento de capacidades de RM.

Agradecimento

Agradecemos o apoio financeiro recebido pela Fundação Araucária.

Referências

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Ministério da Educação, BRASIL.

CAMPOS, A.; PONTE, J. P. Raciocínio Matemático em Contextos Algébricos e Geométricos: uma análise com alunos medalhistas de 9º ano. São Paulo: **Bolema**, v. 36, n.73, p.676-696, 2022.

HENRIQUES, A. O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação. Tese de doutoramento, Educação (Didáctica da Matemática), Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, 2011

MARTINS, A. M.; HENRIQUES, A. C. C. B. Raciocínio matemático: enquadramento curricular, aspectos teóricos e a prática em sala de aula. **Pesquisa e Prática Pedagógica**. Editora Livrologia, Porto Alegre, 2022.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, 2018.

MOREIRA, M. A.; ROSA, P. R. **Pesquisa em Ensino:** Métodos Qualitativos e Quantitativos. 2. ed. Porto Alegre: Brasil, 2016.

OLIVEIRA, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft**. Educação e Matemática**, 100, 3-9.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L. O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. **Quadrante**. Vol. VII, n. 2. p. 41-70, 1998.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular** (pp. 11-34). Lisboa: APM, 2005.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?. **Educação e Matemática**, n. 156, p. 7-11. 2020.

PONTE, J. P.; HENRIQUES, A.; OLIVEIRA, H.; BROCARDO, J.; MATA-PEREIRA, J.; SANTOS, L., SERRAZINA, L. Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos. **Raciocínio matemático e formação de professores**. Project REASON – Mathematical Reasoning and Teacher Education, Lisboa, p. 99 - 107. 2022.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, 10, p. 313-340, 2008.