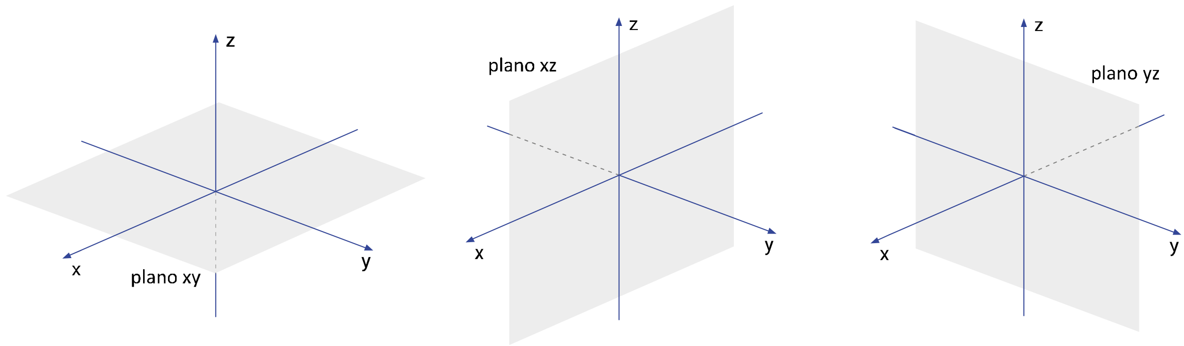
capítulo

15 3D

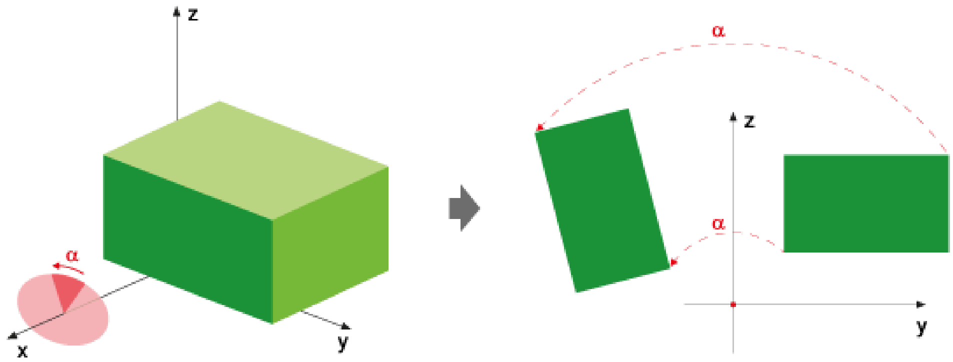
No texto que segue abordamos algumas possibilidades de construção de formas tridimensionais no GeoGebra. Para isso, discutimos inicialmente rotação com vetores em R^3 para, em seguida, obtermos suas projeções no plano. Depois abordamos como construir um arquivo base no GeoGebra sobre o qual faremos construções em três dimensões e, como exemplo, a construção de formas obtidas por revoluções.

ROTAÇÃO EM R³ E PROJEÇÃO NO PLANO

Considere um sistema ortogonal com os eixos x, y e z. Esses eixos tomados dois a dois determinam planos.



A partir de um objeto plotado nesse sistema ortogonal é possível obter outro girando o primeiro em torno do eixo x, y ou z.



Para obter a imagem rotacionada de um objeto um ângulo α em torno do eixo x, por exemplo, é preciso rotacionar cada um de seus vértices $V_n = (x_n, y_n, z_n)$. Para tanto deve ser realizado o seguinte cálculo.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 & \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}_{R_x} . \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

A matriz R_x é a matriz de rotação em torno do eixo x. Neste texto fica designada como R_y a matriz de rotação em um ângulo β em torno do eixo y e de R_z a matriz de rotação um ângulo χ em torno do eixo z, e são elas:

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \operatorname{sen}(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \text{ e } R_z = \begin{bmatrix} \cos(\chi) & -\operatorname{sen}(\chi) & 0 \\ \operatorname{sen}(\chi) & \cos(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Um ponto $V_n = (x_n, y_n, z_n)$ pode ser rotacionado em relação ao eixo x, em seguida em relação ao eixo y e, depois, em relação ao eixo z. Nesse caso, as coordenadas da imagem rotacionada podem ser calculadas por meio da seguinte expressão:

$$R_x \times R_y \times R_z \times V_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \text{sen}(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos(\chi) & -\text{sen}(\chi) & 0 \\ \text{sen}(\chi) & \cos(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\beta).\cos(\chi) & -\cos(\beta).\text{sen}(\chi) & \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).\cos(\chi)+\cos(\alpha).\text{sen}(\chi) & -\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).\text{sen}(\chi)+\cos(\alpha).\cos(\chi) & -\text{sen}(\alpha).\cos(\beta) \\ -\cos(\alpha).\text{sen}(\beta).\cos(\chi)+\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\chi) & \cos(\alpha).\text{sen}(\beta).\text{sen}(\chi)+\text{sen}(\alpha).\cos(\chi) & \cos(\alpha).\cos(\beta) \end{bmatrix}}_{R_{xyz}} . \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

A partir da matriz R_{xyz} obtemos três submatrizes:

$$R_{xyz} = \begin{bmatrix} \cos(\beta).\cos(\chi) & -\cos(\beta).\text{sen}(\chi) & \text{sen}(\beta) \\ \underbrace{\begin{matrix} \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).\cos(\chi)+\cos(\alpha).\text{sen}(\chi) \\ -\cos(\alpha).\text{sen}(\beta).\cos(\chi)+\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\chi) \end{matrix}}_{x'} & \underbrace{\begin{matrix} -\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).\text{sen}(\chi)+\cos(\alpha).\cos(\chi) \\ \cos(\alpha).\text{sen}(\beta).\text{sen}(\chi)+\text{sen}(\alpha).\cos(\chi) \end{matrix}}_{y'} & \underbrace{\begin{matrix} -\text{sen}(\alpha).\cos(\beta) \\ \cos(\alpha).\cos(\beta) \end{matrix}}_{z'} \end{bmatrix}$$

Essas matrizes correspondem a projeções dos vetores coluna no plano yz e serão usadas nas construções das próximas seções.

$$x' = \begin{bmatrix} \text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).\cos(\chi)+\cos(\alpha).\text{sen}(\chi) \\ -\cos(\alpha).\text{sen}(\beta).\cos(\chi)+\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\chi) \end{bmatrix}, \quad y' = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\alpha).\text{sen}(\beta).\text{sen}(\chi)+\cos(\alpha).\cos(\chi) \\ \cos(\alpha).\text{sen}(\beta).\text{sen}(\chi)+\text{sen}(\alpha).\cos(\chi) \end{bmatrix}$$

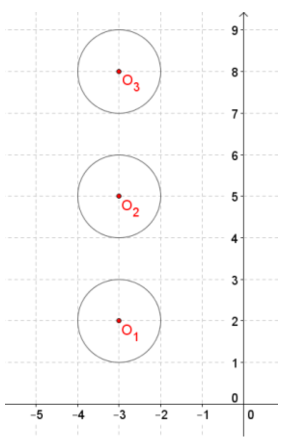
$$z' = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\alpha).\cos(\beta) \\ \cos(\alpha).\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

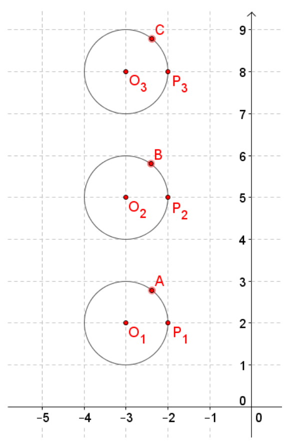
CONSTRUÇÃO DO ARQUIVO BASE

O arquivo que construímos a seguir é utilizado para realizar as demais construções que propomos nesse texto. Assim, após concluirmos essa construção salvaremos com o nome base para ser utilizado em cada construção que iniciarmos.

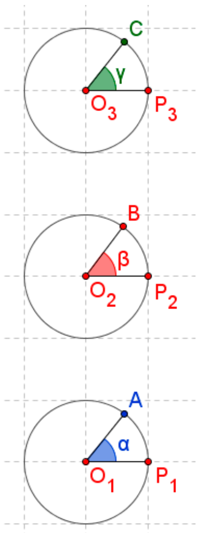
1. Com o GeoGebra aberto exibindo os eixos e a malhas construa três círculos de raio 1 com centro nos pontos: $O_1 = (-3, 2)$, $O_2 = (-3, 5)$ e $O_3 = (-3, 8)$.

2. Construa os pontos $P_1 = (-2, 2)$, $P_2 = (-2, 5)$ e $P_3 = (-2, 8)$ e três pontos sobre as circunferências como mostra a figura abaixo.

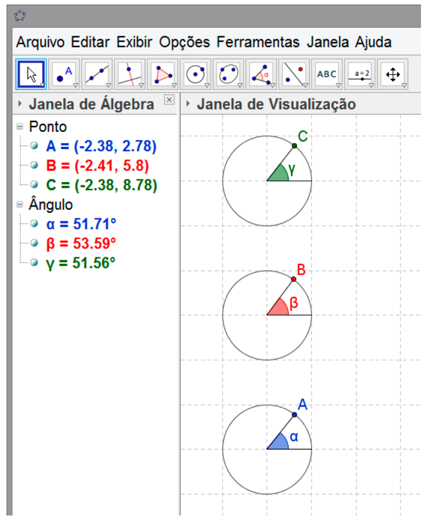




3 Construa os segmentos para determinar os lados dos ângulos $\alpha = P_1O_1A$, $\beta = P_2O_2A$ e $\chi = P_3O_3A$ e, utilizando a ferramenta *Ângulo*, marque esses ângulos.

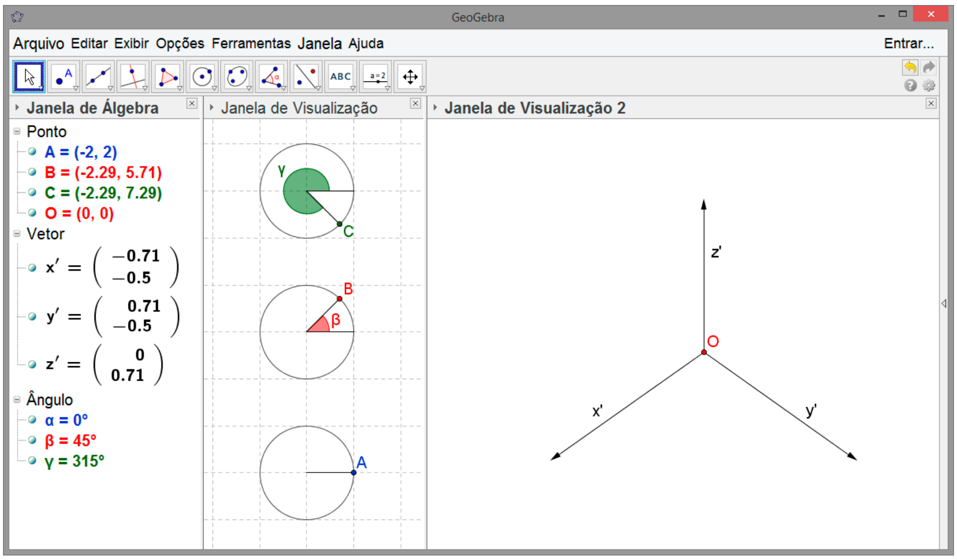


4 Defina as circunferências, os segmentos e os pontos O_1, O_2, O_3, P_1, P_2, P_3 como objetos auxiliares.
Em seguida, oculte os eixos e os objetos construídos de maneira que fiquem exibidos somente os objetos que aparecem na imagem abaixo.



5 Clique no menu *Exibir* e acesse a opção de *Janela de Visualização 2* e, na *Entrada* digite os comandos abaixo para construir um ponto e três vetores:

- O = (0, 0)
- x' = (cos(α) sen(γ), -cos(α) sen(β) cos(γ) + sen(α) sen(γ))
- y' = (-sen(α) sen(β) sen(γ) + cos(α) cos(γ), cos(α) sen(β) sen(γ) + sen(α) cos(γ))
- z' = (-sen(α) cos(β), cos(α) cos(β))



Com isso ficam construídos os vetores que definem o espaço R^3 rotacionado segundo os ângulos α, β e χ e projetado no plano yz. Na imagem acima é apresentada uma projeção de R^3 em xy para $\alpha = 0°$, $\beta = 45°$ e $\chi = 315°$.

Salve o arquivo nomeando-o de base. Utilizamos cópias desse arquivo nas construções que seguem.

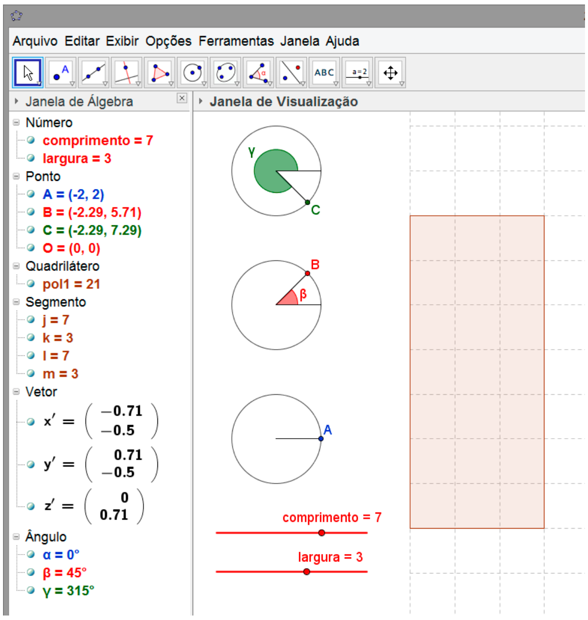
FIGURAS POR REVOLUÇÃO

Abordamos a seguir como construir um objeto no arquivo produzido na seção anterior para obter formas tridimensionais por meio de revoluções.

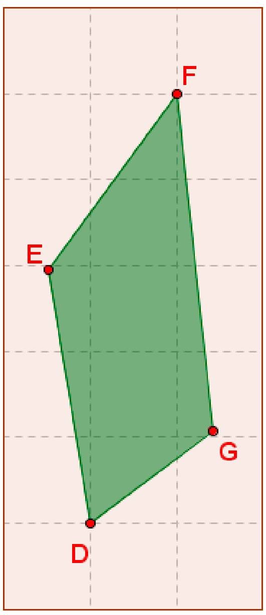
1 Abra o arquivo *base* e construa dois controles deslizantes: *comprimento* e *largura*. Sugerimos que o *comprimento* tenha valor mínimo 0, valor máximo 10 e incremento 0.1; e o *largura* tenha valor mínimo 0, valor máximo 5 e incremento 0.1. Em seguida, na Entrada, digite o seguinte comando:

Entrada: **Polígono[(0,0), (0, comprimento),(largura, comprimento), (largura, 0)]**

Com isso, obtemos um retângulo cuja largura e comprimento são determinadas pelos valores dos controles deslizantes.



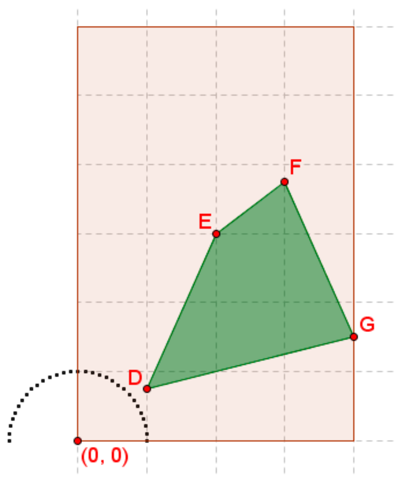
2 Com a ferramenta *Ponto em Objeto* construa quatro pontos no polígono. Em seguida, construa um polígono com vértices nesses pontos.



3 Construa um controle deslizante n com valor mínimo 0, valor máximo 60 e incremento 1. Em seguida, na *Entrada* digite o seguinte comando

Entrada: **L_1=Sequência[Girar[(x(D),0), (i 6)°], i, 0, n]**

Como é possível ver na imagem abaixo, esse comando retorna um conjunto de 30 pontos girados 6°, 12°, 18°, ..., 180° em torno de (0, 0), pois n = 30 e o ponto girado corresponde a projeção ortogonal de D sobre o eixo x.

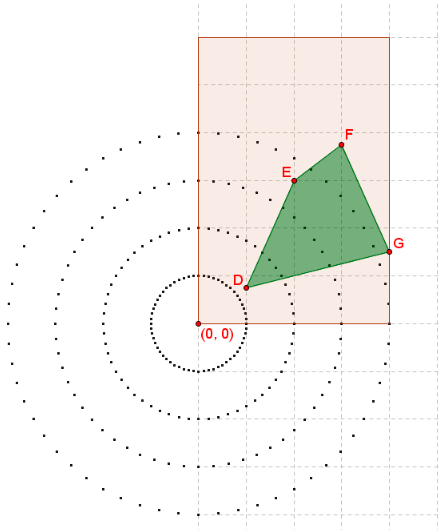


4 Na Entrada digite os comandos abaixo

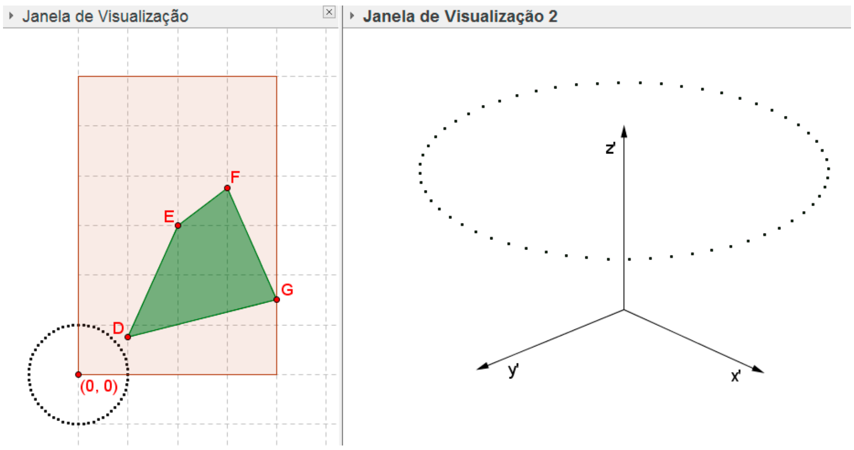
- L_2=Sequência[Girar[(x(E),0), (i 6)°], i, 0, n]
- L_3=Sequência[Girar[(x(F),0), (i 6)°], i, 0, n]
- L_4=Sequência[Girar[(x(G),0), (i 6)°], i, 0, n]

para obter as sequências de giros em torno de (0, 0) das projeções ortogonais de E, F e G no eixo x.

Fazendo n = 60 você obtém a figura ao lado.



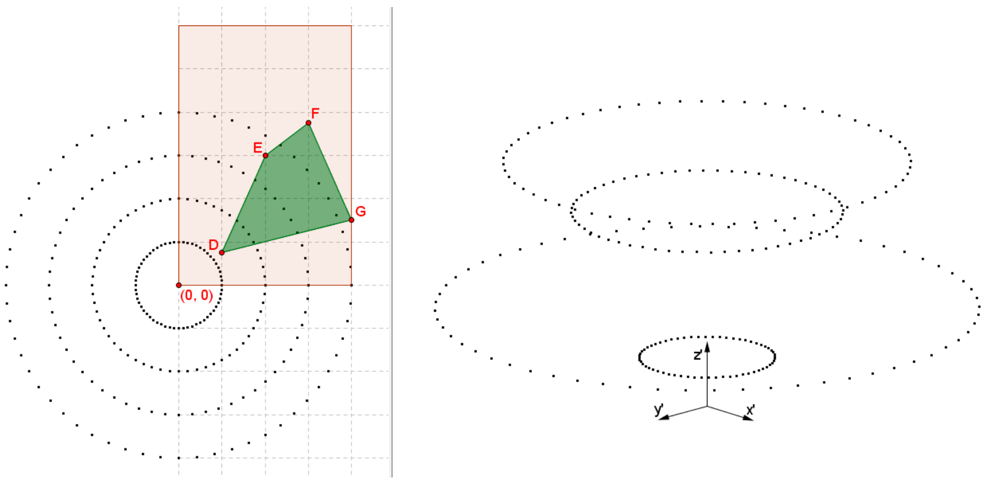
5 Digitando o comando L_5 = Sequência[x(Elemento[L_1, i]) x' + y(Elemento[L_1, i]) y' + y(D) z', i, 1, n], você obtém a representação em 3D dos pontos da sequência L_1, ou seja, os 60 pontos dessa sequência correspondentes a giros da projeção de D em torno de (0, 0) são plotados no plano x'y' e transladados pelo vetor y(D) . z'.



Na *Janela de Visualização* aparecem os pontos em uma representação plana e, na *Janela de Visualização 2*, as imagens desses pontos em uma representação tridimensional.

6 A partir dos comandos abaixo você obtém a representação tridimensional das sequências de pontos L2, L3 e L4.

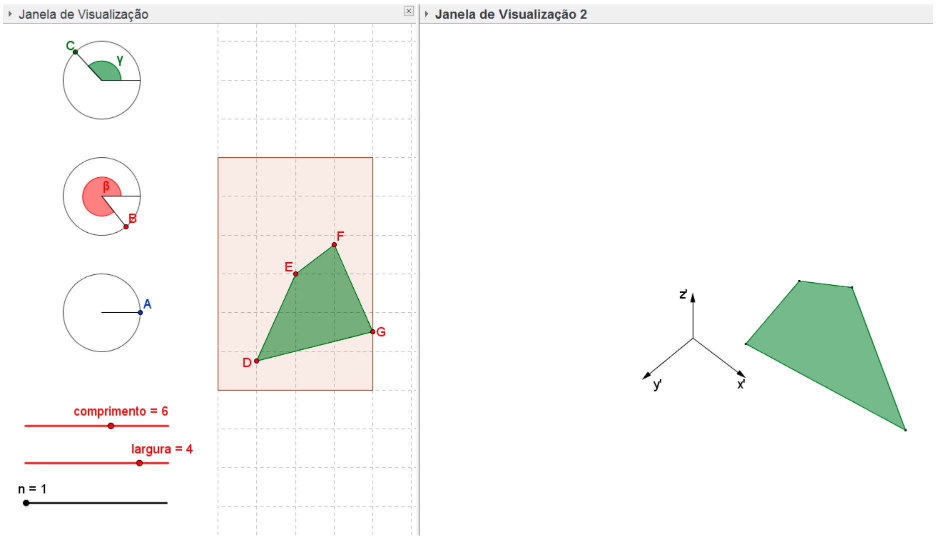
- L_6 = Sequência[x(Elemento[L_2, i]) x' + y(Elemento[L_2, i]) y' + y(E) z', i, 1, n]
- L_7 = Sequência[x(Elemento[L_3, i]) x' + y(Elemento[L_3, i]) y' + y(F) z', i, 1, n]
- L_8 = Sequência[x(Elemento[L_4, i]) x' + y(Elemento[L_4, i]) y'+ y(G) z', i, 1, n]



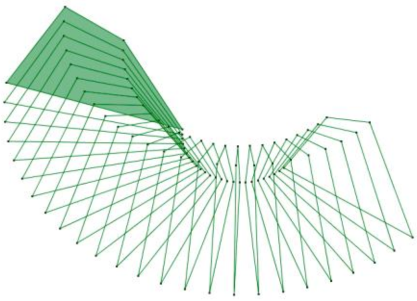
7 Digitando o seguinte comando

L_9 = Sequência[Polígono[Elemento[L_5, i], Elemento[L_6, i], Elemento[L_7, i], Elemento[L_8, i]], i, 0, n]

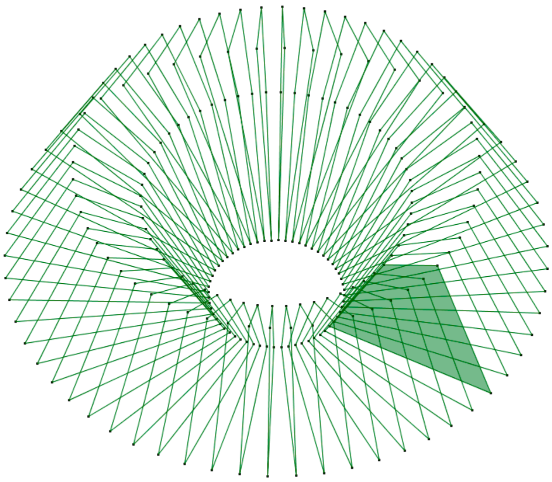
na *Entrada* você obtém os polígonos formados por elementos das listas L_5, L_6, L_7 e L_8. Veja na imagem abaixo o resultado para n = 1, n= 25 e n = 60.



n = 25



n=60

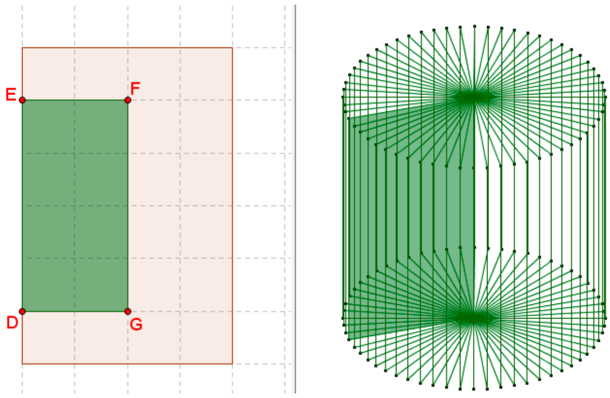


O polígono verde exibido na Janela de Visualização 2 é obtido por meio do seguinte comando:

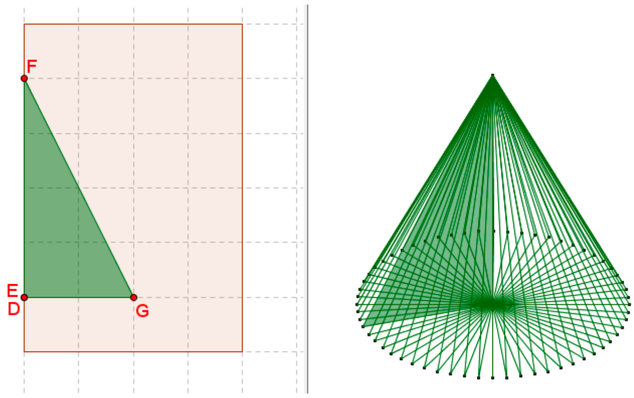
Polígono[Elemento[L_5, n], Elemento[L_6, n], Elemento[L_7, n], Elemento[L_8, n]]

Reposicionando os pontos D, E, F e G é possível obter cilindros, cones e troncos de cone.

cilindro



cone



tronco de cone